

09.11.23

Математика

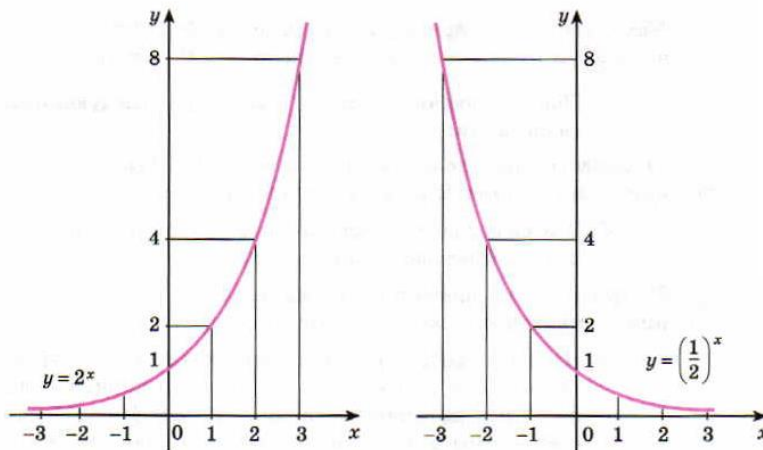
Тема: «Показательные уравнения и неравенства»

Показательная функция

$$y = 2^x$$

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Выполнить № 208-211.



Решение простейших показательных уравнений

Задача 1 Решить уравнение $3^x = 27$.

- По свойству (2) показательной функции данное уравнение имеет корень, так как $27 > 0$. Одним из корней является число $x = 3$, так как $3^3 = 27$.

Рассмотрим несколько примеров показательных уравнений, т. е. уравнений, в которых неизвестное содержится в показателе степени.

Решение показательных уравнений часто сводится к решению уравнения $a^x = a^b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, x — неизвестное. Это уравнение решается с помощью свойства степени (см. сл. 2, § 5, гл. I): степени с одинаковым основанием $a > 0$, $a \neq 1$ равны тогда и только тогда, когда равны их показатели.

Задача 1 Решить уравнение $4 \cdot 2^x = 1$.

- Запишем уравнение в виде $2^{x+2} = 2^0$, откуда $x + 2 = 0$.

Ответ $x = -2$. ◀

Задача 2 Решить уравнение $2^{3x} \cdot 3^x = 576$.

- Так как $2^{3x} = (2^3)^x = 8^x$, $576 = 24^2$, то уравнение можно записать в виде $8^x \cdot 3^x = 24^2$, или в виде $24^x = 24^2$, откуда $x = 2$.

Ответ $x = 2$. ◀

Задача 3 Решить уравнение $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 25$.

► Вынося в левой части за скобки общий множитель 3^{x-2} , получаем $3^{x-2}(3^3 - 2) = 25$, $3^{x-2} \cdot 25 = 25$, откуда $3^{x-2} = 1$, $x - 2 = 0$, $x = 2$.

Ответ $x = 2$. ◀

Задача 4 Решить уравнение $3^x = 7^x$.

► Так как $7^x \neq 0$, то уравнение можно записать в виде $\frac{3^x}{7^x} = 1$, откуда $\left(\frac{3}{7}\right)^x = 1$, $x = 0$.

Ответ $x = 0$. ◀

Задача 5 Решить уравнение $3 \cdot 2^{x+1} + 2 \cdot 5^{x-2} = 5^x + 2^{x-2}$.

► Запишем уравнение в виде $3 \cdot 2^{x+1} - 2^{x-2} = 5^x - 2 \cdot 5^{x-2}$, откуда $2^{x-2}(3 \cdot 2^3 - 1) = 5^{x-2}(5^2 - 2)$, $2^{x-2} \cdot 23 = 5^{x-2} \cdot 23$, $\left(\frac{2}{5}\right)^{x-2} = 1$, $x - 2 = 0$.

Ответ $x = 2$. ◀

Задача 6 Решить уравнение $9^x - 4 \cdot 3^x - 45 = 0$.

► Заменой $3^x = t$ данное уравнение сводится к квадратному уравнению $t^2 - 4t - 45 = 0$. Решая это уравнение, находим его корни: $t_1 = 9$, $t_2 = -5$, откуда $3^x = 9$, $3^x = -5$. Уравнение $3^x = 9$ имеет корень $x = 2$, а уравнение $3^x = -5$ не имеет корней, так как показательная функция не может принимать отрицательные значения.

Ответ $x = 2$. ◀

Задача 7 Решить уравнение

$$5^{2x^2 - 5x} = 5^{x^2 + 2x - 10}. \quad (1)$$

► Так как $5 > 0$, $5 \neq 1$, то

$$2x^2 - 5x = x^2 + 2x - 10, \quad (2)$$

откуда $x^2 - 7x + 10 = 0$, $x_1 = 5$, $x_2 = 2$.

Ответ $x_1 = 5$, $x_2 = 2$. ◀

Отметим, что при таком способе решения получается уравнение, равносильное исходному, например уравнение (2) равносильно уравнению (1). Поэтому после решения уравнения (2) проверка не нужна (если есть уверенность в том, что не допущены ошибки в преобразованиях и вычислениях).

Задача 8 Решить уравнение $3^{|x-1|} = 3^{|x+3|}$.

► Так как $3 > 0$, $3 \neq 1$, то исходное уравнение равносильно уравнению $|x - 1| = |x + 3|$.

Возводя это уравнение в квадрат, получаем его следствие $(x - 1)^2 = (x + 3)^2$, откуда

$$x^2 - 2x + 1 = x^2 + 6x + 9, \quad 8x = -8, \quad x = -1.$$

Проверка показывает, что $x = -1$ — корень исходного уравнения.

Ответ $x = -1$. \triangleleft

Задача 9 Решить уравнение $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[5]{5} = 225$.

► Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} (3 \cdot 5)^{\frac{1}{x}} = 225, \\ x \in \mathbb{N}, \quad x > 1. \end{cases}$$

Преобразовав уравнение системы к виду $15^{\frac{1}{x}} = 15^2$, имеем $\frac{1}{x} = 2$, откуда $x = \frac{1}{2}$. Но $x = \frac{1}{2}$ не удовлетворяет условию $x > 1, x \in \mathbb{N}$, т. е. уравнение не имеет корней. \triangleleft

Упражнения

Решить уравнение (208—223).

208 1) $4^{x-1} = 1$; 2) $0,3^{3x-2} = 1$; 3) $2^{2x} = 2^{4\sqrt{3}}$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$.

209 1) $27^x = \frac{1}{3}$; 2) $400^x = \frac{1}{20}$; 3) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 25$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{81}$.

210 1) $3 \cdot 9^x = 81$; 2) $2 \cdot 4^x = 64$;
3) $3^{x+\frac{1}{2}} \cdot 3^{x-2} = 1$; 4) $0,5^{x+7} \cdot 0,5^{1-2x} = 2$;
5) $0,6^x \cdot 0,6^3 = \frac{0,6^{2x}}{0,6^5}$; 6) $6^{3x} \cdot \frac{1}{6} = 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{2x}$.

211 1) $3^{2x-1} + 3^{2x} = 108$; 2) $2^{3x+2} - 2^{3x-2} = 30$;
3) $2^{x+1} + 2^{x-1} + 2^x = 28$; 4) $3^{x-1} - 3^x + 3^{x+1} = 63$.

212 1) $5^x = 8^x$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; 3) $3^x = 5^{2x}$; 4) $4^x = 3^{\frac{x}{2}}$.

213 1) $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$; 2) $16^x - 17 \cdot 4^x + 16 = 0$;
3) $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$; 4) $64^x - 8^x - 56 = 0$.

214 1) $3^{x^2+x-12} = 1$; 2) $2^{x^2-7x+10} = 1$;
3) $2^{\frac{x-1}{x-2}} = 4$; 4) $0,5^{\frac{1}{x}} = 4^{\frac{1}{x+1}}$.

- 215 1) $0,3^{x^3 - x^2 + x - 1} = 1$; 2) $\left(2\frac{1}{3}\right)^{-x^2 - 2x + 3} = 1$;
 3) $5,1^{\frac{1}{2}(x-3)} = 5,1\sqrt{5,1}$; 4) $100x^{2-1} = 10^{1-5x}$.
- 216 1) $10^x = \sqrt[3]{100}$; 2) $10^x = \sqrt[5]{10000}$; 3) $225^{2x^2 - 24} = 15$;
 4) $10^x = \frac{1}{\sqrt[4]{10000}}$; 5) $(\sqrt{10})^x = 10^{x^2 - x}$; 6) $100x^{2-1} = 10^{1-5x}$.
- 217 1) $2^{x^2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}x} = \sqrt[4]{8}$; 2) $5^{0,1x} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-0,06} = 5^{x^2}$;
 3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{1-x}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$; 4) $0,7^{\sqrt{x+12}} \cdot 0,7^{-2} = 0,7^{\sqrt{x}}$.
- 218 1) $7^x - 7^{x-1} = 6$; 2) $3^{2y-1} + 3^{2y-2} - 3^{2y-4} = 315$;
 3) $5^{3x} + 3 \cdot 5^{3x-2} = 140$; 4) $2^{x+1} + 3 \cdot 2^{x-1} - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$.
- 219 1) $7^{x-2} = 3^{2-x}$; 2) $2^{x-3} = 3^{3-x}$;
 3) $3^{\frac{x+2}{4}} = 5^{x+2}$; 4) $4^{\frac{x-3}{2}} = 3^{2(x-3)}$.
- 220 1) $(0,5)^{x^2 - 4x + 3} = (0,5)^{2x^2 + x + 3}$; 2) $(0,1)^{3+2x} = (0,1)^{2-x^2}$;
 3) $3^{\sqrt{x-6}} = 3^x$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2-x}}$.
- 221 1) $2^{|x-2|} = 2^{|x+4|}$; 2) $1,5^{|5-x|} = 1,5^{|x-1|}$;
 3) $3^{|x+1|} = 3^{2-|x|}$; 4) $3^{|x|} = 3^{|2-x|-1}$.
- 222 1) $3^{x+3} + 3^x = 7^{x+1} + 5 \cdot 7^x$;
 2) $3^{x+4} + 3 \cdot 5^{x+3} = 5^{x+4} + 3^{x+3}$;
 3) $2^{8-x} + 7^{3-x} = 7^{4-x} + 2^{3-x} \cdot 11$;
 4) $2^{x+1} + 2^{x-1} - 3^{x-1} = 3^{x-2} - 2^{x-3} + 2 \cdot 3^{x-3}$.
- 223 1) $8 \cdot 4^x - 6 \cdot 2^x + 1 = 0$; 2) $\left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x - 6 = 0$;
 3) $13^{2x+1} - 13^x - 12 = 0$; 4) $3^{2x+1} - 10 \cdot 3^x + 3 = 0$;
 5) $2^{3x} + 8 \cdot 2^x - 6 \cdot 2^{2x} = 0$; 6) $5^{3x+1} + 34 \cdot 5^{2x} - 7 \cdot 5^x = 0$.
- 224 При каких значениях x сумма чисел 2^{x-1} , 2^{x-4} и 2^{x-2} равна сумме бесконечно убывающей геометрической прогрессии $6,5$; $3,25$; $1,625$; ...?
- Решить уравнение (225—226).
- 225 1) $3^{2x+6} = 2^{x+3}$; 2) $5^{x-2} = 4^{2x-4}$;
 3) $2^x \cdot 3^x = 36^{x^2}$; 4) $9^{-\sqrt{x-1}} = \frac{1}{27}$.

